UFR Mathématiques — Université Rennes 1
Master Mathématiques / FHFS — 2020/2021

Feuille Uniformisation

Exercice [Schwarz-Christoffel]

Sous-exercice 1 : Soient $A_1 < \ldots < A_n$ n points de $\mathbf{R}$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in]0,1[$ tels que $\sum \alpha_k > 1$

On note $(z - A_k)^{\alpha_k}$ la fonction sur $\mathbf{C} - \{A_k + iy \mid y \leq 0\}$ correspondant à la détermination de l'argument dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$. L'intégrale de Schwarz-Christoffel est définie par

$$S(z) = \int_0^z \frac{d\tau}{\prod_k (\tau - A_k)^{\alpha_k}}.$$

1. Montrer que S est bien définie, holomorphe sur $\mathbf{C} - \cup_k \{A_k + iy \mid y \leq 0\}$ s'étend continument sur $\hat{\mathbf{R}}$
   On note $a_k = S(A_k)$ et $a_\infty = S(\infty)$ et on suppose que $\sum \alpha_k \leq 2$
2. Montrer que l'image de la droite réelle par S est le polygone de sommets ordonnés $a_1, \ldots, a_n, a_\infty$ (privé du point a_∞
3. Préciser les angles intérieurs. Quelle est la différence entre le cas $\sum \alpha_k < 2$ et le cas $\sum \alpha_k = 2$?

Sous-exercice 2 :

Soit P un ouvert polygonal de sommets ordonnés $a_1, \ldots, a_n$ et d'angles externes $\pi\alpha_k$. Soit f un biholomorphisme de $\mathbb{H}$ sur P que l'on étendra continument au bord. On note A_k la préimage de a_k et on renumérote les points afin que les A_k soient rangés par ordre croissant.

Nous voulons montrer qu'il existe deux complexes b et c tels que f soit donnée par la formule

$$f(z) = bS(z) + d.$$

1. Que vaut la somme $\sum \alpha_k$?
2. Montrer que pour prouver cette égalité, il suffit de montrer que $\frac{f''}{f'}$ s'étend en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C} - \{A_1, \ldots, A_k\}$, nulle à l'infini, avec des pôles simples en les A_k de résidu $-\alpha_k$.
3. Montrer que la fonction $g_k(z) = (f(z) - a_k)^{1/(1-\alpha_k)}$ s'étend en un biholomorphisme de la bande $\{A_{k-1} < Re < A_{k+1}\}$ sur son image.
4. En déduire que f''/f' se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C} - \{A_1, \ldots, A_k\}$, nulle à l'infini, avec des pôles simples en les A_k de résidu $-\alpha_k$
5. Que se passe-t-il lorsque $A_n = \infty$?

Exercice [Un cas particulier]

1. Montrer que la formule
   $$S(z) = \int_0^z \frac{d\tau}{(1 - \tau^n)^{2/n}}$$
   réalise un biholomorphisme de $\mathbb{D}$ sur l'ouvert délimité par un polygone régulier à n côtés, envoyant les racines n-èmes de l'unité sur les sommets.
2. Montrer que la distance d'un sommet de ce polygone à l'origine est $R_n = \int_0^1 \frac{d\tau}{(1-\tau^n)^{2/n}}$.
3. Montrez que $\Gamma(x)\Gamma(y) = \Gamma(x+y)B(x,y)$ où B est la fonction beta d'Euler définie par
   $$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$
   En déduire que
   $$R_n = \frac{\Gamma(1 - \frac{2}{n})\Gamma(\frac{1}{n})}{n\Gamma(1 - \frac{1}{n})}$$
4. Montrer également que la longueur L_n d'un côté du polygone est $L_n = \frac{2\pi\Gamma(1-\frac{2}{n})}{n\Gamma(1-\frac{1}{n})^2}$